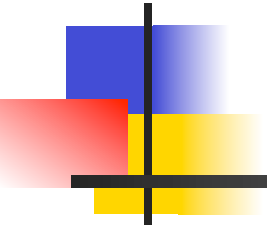


Sistemas Fuzzy





Sistemas especialistas Fuzzy

■ Especialistas

- Senso comum para resolver problemas
- Impreciso, inconsistente, incompleto, vago
 - “Embora o transformador esteja um pouco carregado, pode-se usá-lo por um tempo”
- Nenhum problema para outro especialista, mas sim para o EC

■ Lógica Fuzzy:

- Idéia: todas as coisas admitem graus (temperatura, altura, velocidade, distância, etc...)
- Desenvolvida por Lofti A. Zadeh da Universidade da Califórnia em Berkeley na década de 60



Grau de Crença x Grau de Verdade

- Grau de Crença x Teoria das Probabilidades

- 80% dos pacientes com dor de dentes têm cáries
 - Uma probabilidade de 0.8 **não significa “80% verdade”** mas sim um **grau de crença de 80% na regra** Grau de verdade x Lógica Fuzzy
- *Mário é alto*
 - A proposição é verdadeira para uma altura de Mario 1.65m ?
 - ...mais ou menos....
 - Observar que **não há incerteza**, estamos **seguros da altura de Mario**
- O **termo linguístico “alto” é vago**, como interpretá-lo?
- Por exemplo, a teoria de conjuntos Fuzzy (semântica para lógica fuzzy) permite especificar quão bem um objeto satisfaz uma descrição vaga (predicado vago)
 - O grau de pertinência de um objeto a um conjunto fuzzy é representado por algum número em [0,1]



Características: Lógica Fuzzy (1/2)

- Lógica convencional: sim-ou-não, verdadeiro-ou-falso
- Lógica Fuzzy (difusa ou nebulosa):
 - Refletem o que as pessoas pensam
 - Tenta modelar o nosso senso de palavras, tomada de decisão ou senso comum
- Trabalha com uma grande variedade de informações vagas e incertas, as quais podem ser traduzidas por expressões do tipo: a maioria, mais ou menos, talvez, etc.



Características: Lógica Fuzzy (2/2)

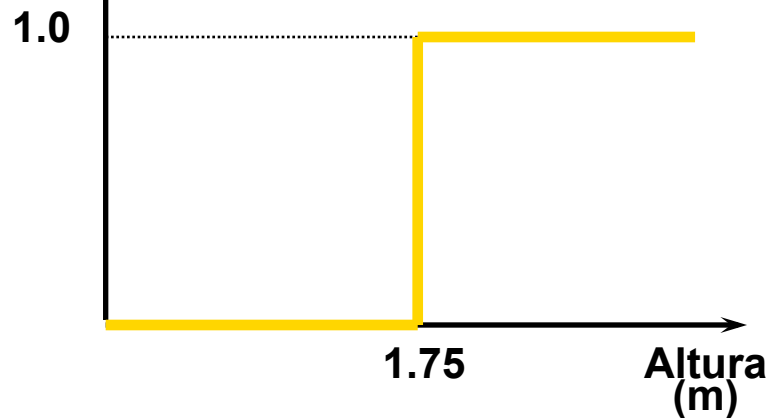
- Antes do surgimento da lógica fuzzy essas informações não tinham como ser processadas
- A lógica fuzzy contém como casos especiais não só os sistemas lógicos binários, como também os multi-valorados
- A lógica fuzzy vem sendo aplicada nas seguintes áreas
 - Análise de dados
 - Construção de sistemas especialistas
 - Controle e otimização
 - Reconhecimento de padrões, etc.
- Conjunto de princípios matemáticos para a representação do conhecimento baseado no grau de pertinência dos termos

Conjuntos Fuzzy (1/3)

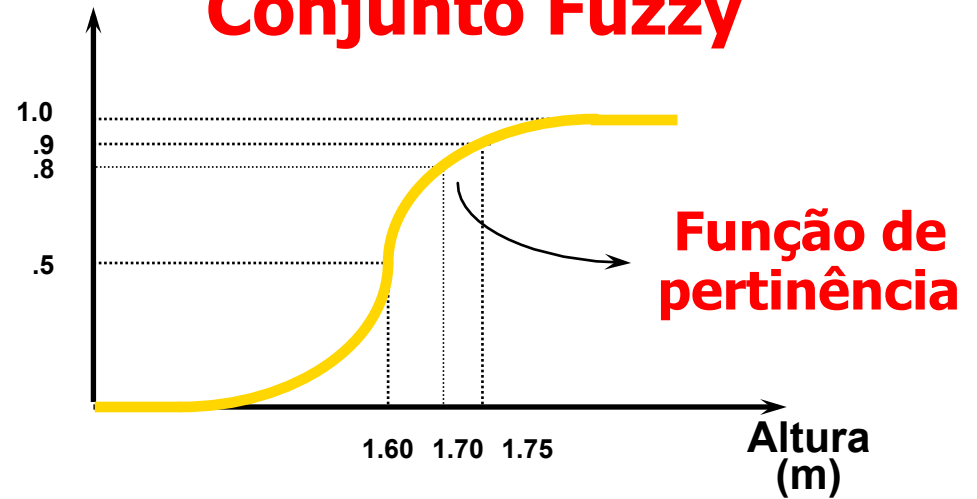
- Conjuntos com limites imprecisos

A = Conjunto de pessoas altas

Conjunto Clássico



Conjunto Fuzzy





Conjuntos Fuzzy (2/3)

- Um conjunto fuzzy A definido no universo de discurso X é caracterizado por uma **função de pertinência** μ_A , a qual mapeia os elementos de X para o intervalo $[0,1]$.

$$\mu_{A:X} \rightarrow [0,1]$$

- Desta forma, a função de pertinência associa a cada elemento x pertencente a X um número real $\mu_{A(x)}$ no intervalo $[0,1]$, que representa o **grau de pertinência** do elemento x ao conjunto A , isto é, o quanto é possível para o elemento x pertencer ao conjunto A .
- Uma sentença pode ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa
- $\mu_{A(x)} : x \rightarrow [0,1], \mu_{A(x)} = 0$
 $0 < \mu_{A(x)} < 1$
 $\mu_{A(x)} = 1$



Conjuntos Fuzzy (3/3)

Definição formal

- Um conjunto fuzzy A em X é expresso como um conjunto de pares ordenados:

$$A = \{(x, \underbrace{\mu_A(x)}_{\text{Função de pertinência (MF)}}) \mid x \in X\}$$

Conjunto fuzzy

Universo ou Universo de discurso

Um conjunto fuzzy é totalmente caracterizado por sua função de pertinência (MF)



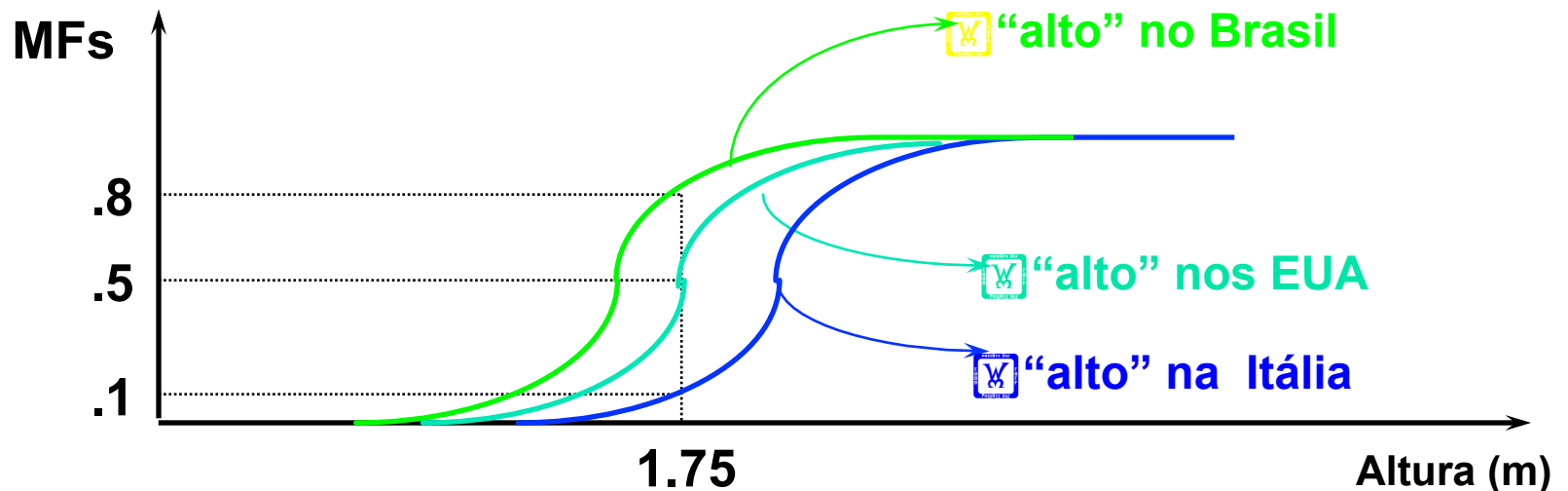
Como representar um conjunto Fuzzy num computador?

1. Função de pertinência

- Reflete o conhecimento que se tem em relação a intensidade com que o objeto pertence ao conjunto fuzzy
- Métodos para adquirir esse conhecimento do especialista
- Ex: Perguntar ao especialista se vários elementos pertencem a um conjunto

Função de Pertinência

- Várias formas diferentes
- Representadas uma função de mapeamento
- Características das funções de pertinência:
 - Medidas subjetivas
 - Funções não probabilísticas monotonicamente crescentes, decrescentes ou subdividida em parte crescente e parte decrescente.





Função de Pertinência

- Função Triangular

$$\text{trimf}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

- Função Trapezoidal

$$\text{trapmf}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

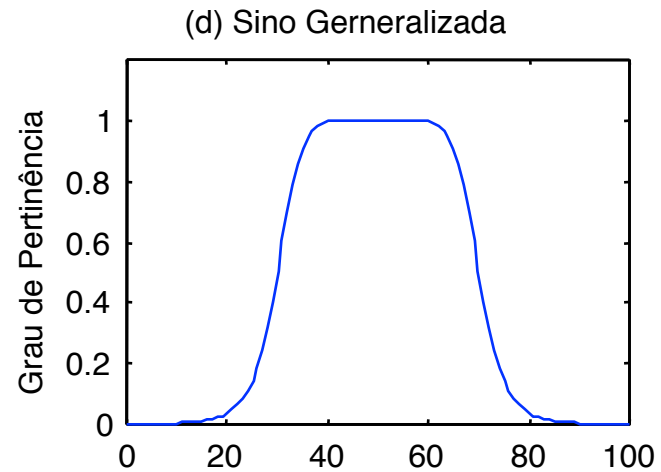
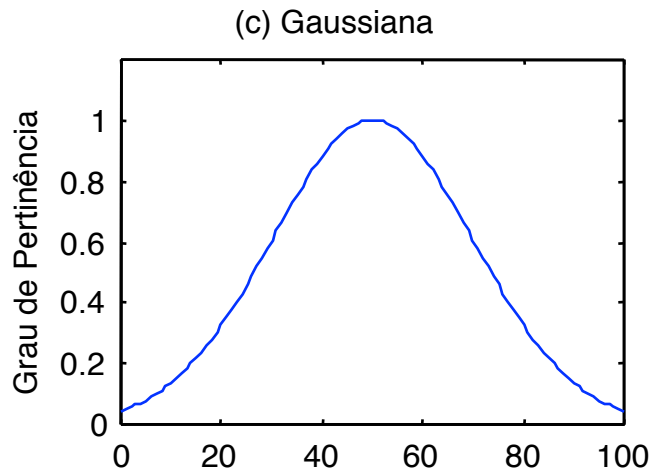
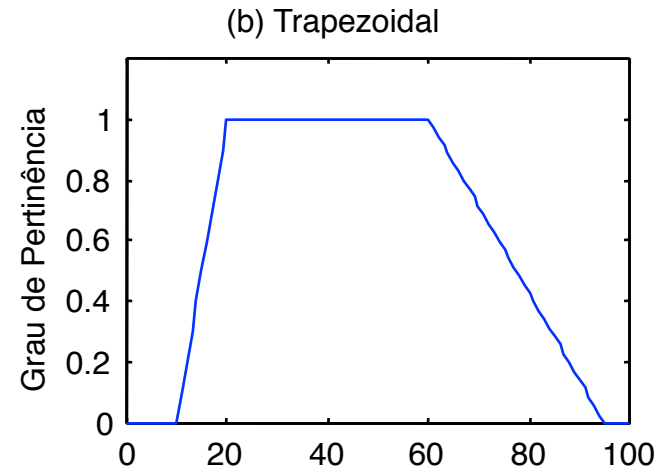
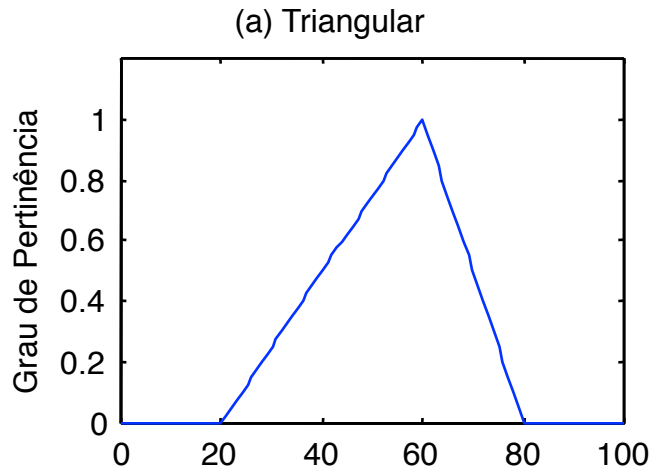
- Função Gaussiana

$$\text{gaussmf}(x; a, b, c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

- Função Sino Generalizada

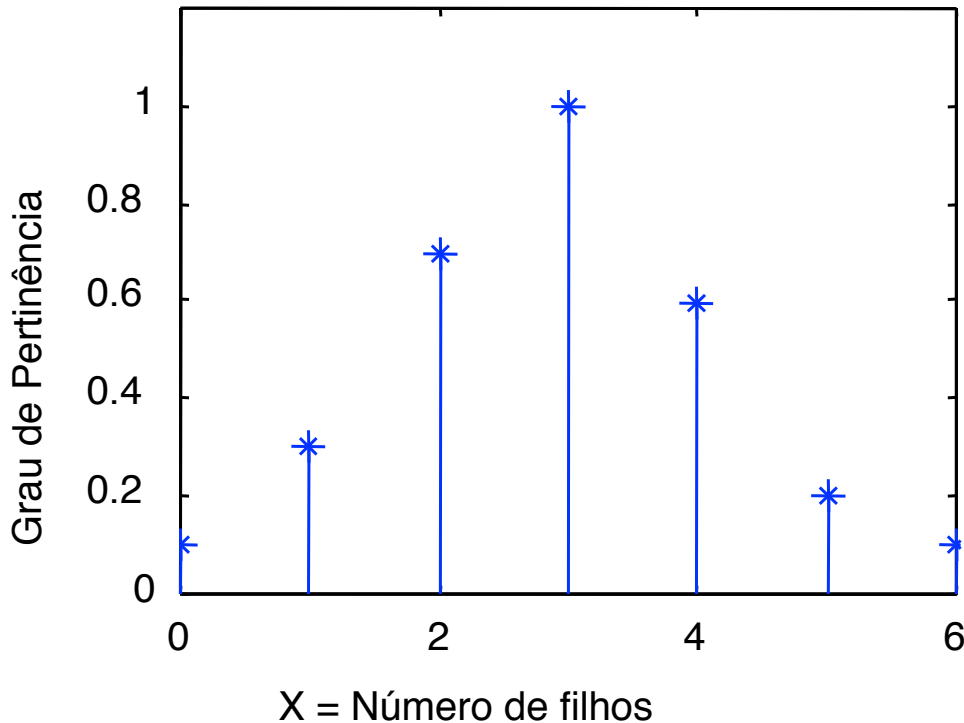
$$\text{gbellmf}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{b}\right|^{2b}}$$

Função de Pertinência



Função de pertinência: Universo Discreto

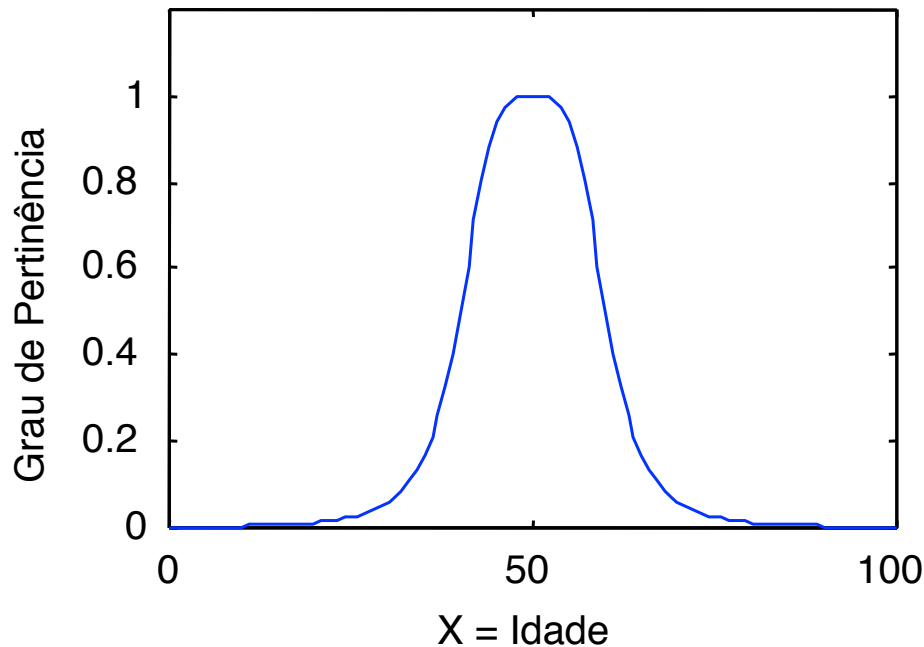
(a) Universo Discreto



- $X = \{SF, Boston, LA\}$ (discreto e não ordenado)
 - $C = \text{“Cidade desejável para se viver”}$
 - $C = \{(SF, 0.9), (Boston, 0.8), (LA, 0.6)\}$
- $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (discreto)
 - $A = \text{“Número de filhos”}$
 - $A = \{(0, .1), (1, .3), (2, .7), (3, 1), (4, .6), (5, .2), (6, .1)\}$

Função de pertinência: Universo Contínuo

(b) Universo Contínuo

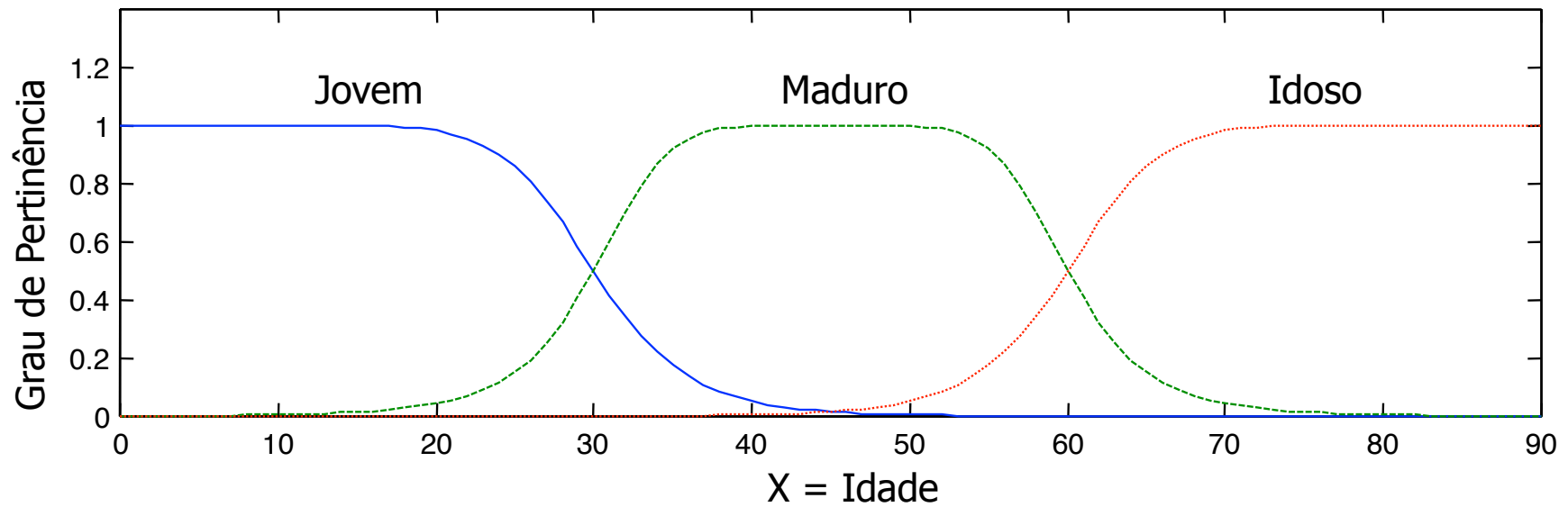


$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2}$$

- $X = (\text{Conjunto de números reais positivos})$ (contínuo)
- $B = \text{“Pessoas com idade em torno de 50 anos”}$
- $B = \{(x, \mu_{B(x)}) \mid x \text{ em } X\}$

Partição Fuzzy

- Partição fuzzy do universo de X representando “idade”, formada pelos conjuntos fuzzy “jovem”, “maduro” e “idoso”.





Variáveis Lingüísticas

- Uma variável lingüística possui valores que não são números, mas sim palavras ou frases na linguagem natural.
 - Idade = idoso
- Um valor lingüístico é um conjunto fuzzy.
- Todos os valores lingüísticos formam um conjunto de termos:
 - $T(\text{idade}) = \{\text{Jovem, velho, muito jovem, ...}$
Maduro, não maduro, ...
Velho, não velho, muito velho, mais ou menos velho, ...
Não muito jovem e não muito velho, ...}
- Permitem que a linguagem da modelagem fuzzy expresse a semântica usada por especialistas

Exemplo:

If projeto.duração *is* não muito LONGO
then risco *is* ligeiramente reduzido



Hedges (modificadores)

- Termos que são usados para modificar a forma dos conjuntos fuzzy

- Muito, algo mais ou menos, um pouco

- São universais

- Compostos de nome e fórmula

- Muito: $\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^2$

- Extremamente

$$\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^3$$

- Muito muito $\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^4$

- Um pouco $\mu_A^M(x) = (\mu_A(x))^{1,3}$

- Mais ou menos $\mu_A^M(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$

- Indeed

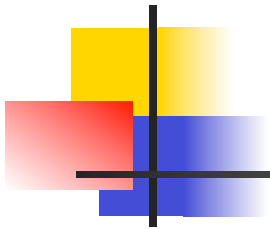
$$\mu_A^M(x) = 2 * (\mu_A(x))^2, 0 \leq \mu \leq 0,5$$

$$\mu_A^M(x) = 1 - 2(1 - \mu_A(x))^2, 0,5 < \mu \leq 1$$



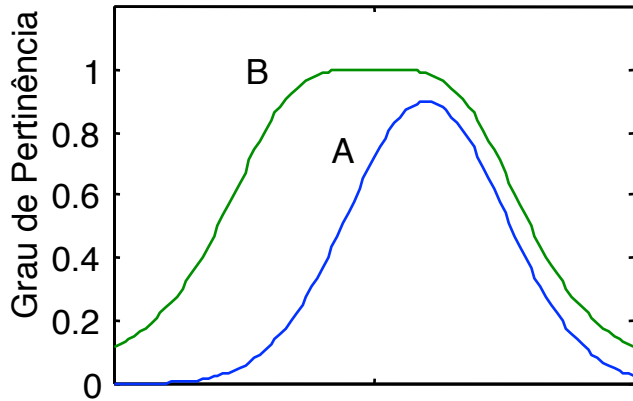
Operações Básicas

- Subconjunto → $A \subset B$, se $\mu_{B(x)} \geq \mu_{A(x)}$ para cada $x \in X$ ∈
- Igualdade → $A = B$, se $\mu_{A(x)} = \mu_{B(x)}$ para cada $x \in X$ ∈
- Complemento
- Complemento Relativo → $\neg A = X - A \rightarrow \mu_{\neg A(x)} = 1 - \mu_{A(x)}$
- $\mu_{E(x)} = \text{Max} [0, \mu_{A(x)} - \mu_{B(x)}]$
- União → $C = A \cup B \rightarrow \mu_{C(x)} = \max(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$
→ $C = \mu_{A(x)} \vee \mu_{B(x)}$
- Interseção → $C = A \wedge B \rightarrow \mu_{C(x)} = \min(\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)})$
→ $C = \mu_{A(x)} \wedge \mu_{B(x)}$

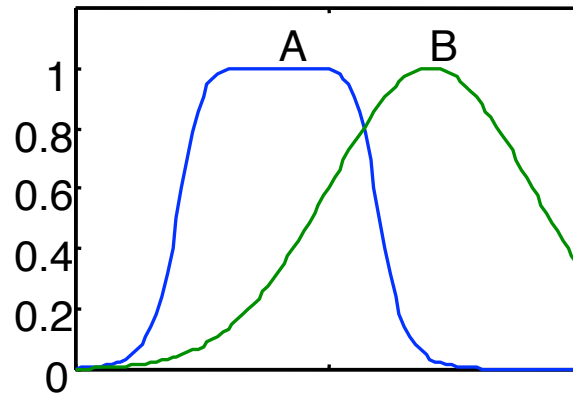


Representação

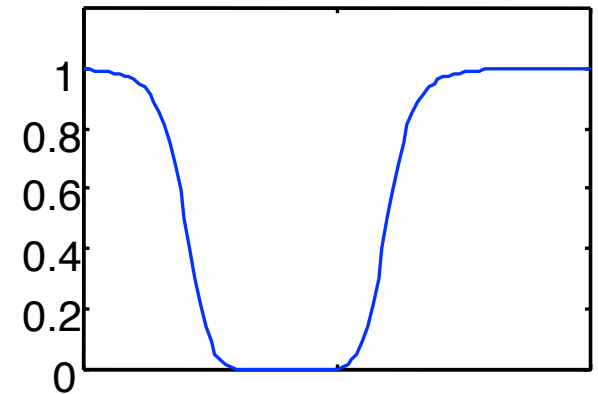
A está contido em B



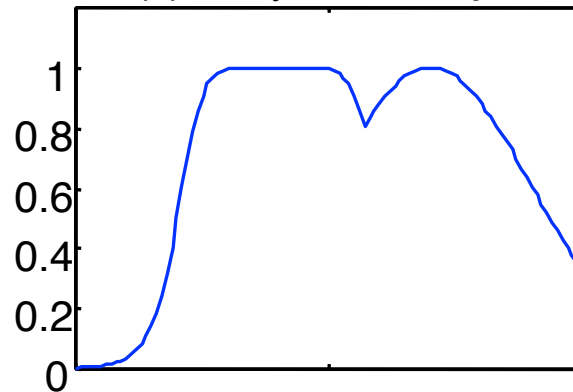
(a) Conjuntos Fuzzy A e B



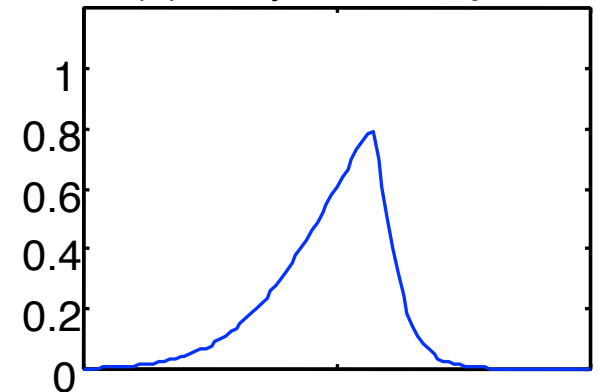
(b) Conjunto Fuzzy não "A"



(c) Conjunto Fuzzy "A ou B"



(d) Conjunto Fuzzy "A e B"





Exemplo (União|Interseção)

- $X = \{a, b, c, d, e\}$
 - $A = \{1/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.9/e\}$
 - $B = \{0.2/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.4/e\}$
 - União
 - $C = \{1/a, 0.9/b, 0.4/c, 1/d, 0.9/e\}$
 - Interseção
 - $D = \{0.2/a, 0.7/b, 0.3/c, 0/d, 0.4/e\}$



Propriedades

- Comutatividade

- $A \vee B = B \vee A$ $A \wedge B = B \wedge A$

- Idempotência

- $A \vee A = A$ $A \wedge A = A$

- Associatividade

- $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C = A \vee B \vee C$ $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge B \wedge C$

- Distributividade

- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Propriedades padrões: Comutatividade, Idempotência, Associatividade, Distributividade etc. são válidas para os conjuntos fuzzy. Exceção:

$$\exists A \wedge A \neq \phi$$

$$\exists A \vee A \neq X$$



Regras Fuzzy

Consistem:

- Conjunto de condições IF (usando conectivos *and*, *or* ou *not*)
- Uma conclusão THEN
- Uma conclusão opcional ELSE

Exemplo:

Velocidade [0,220]

1. Se velocidade > 100
Então DPP é 30 metros
2. Se velocidade < 40
Então DPP é 10 metros

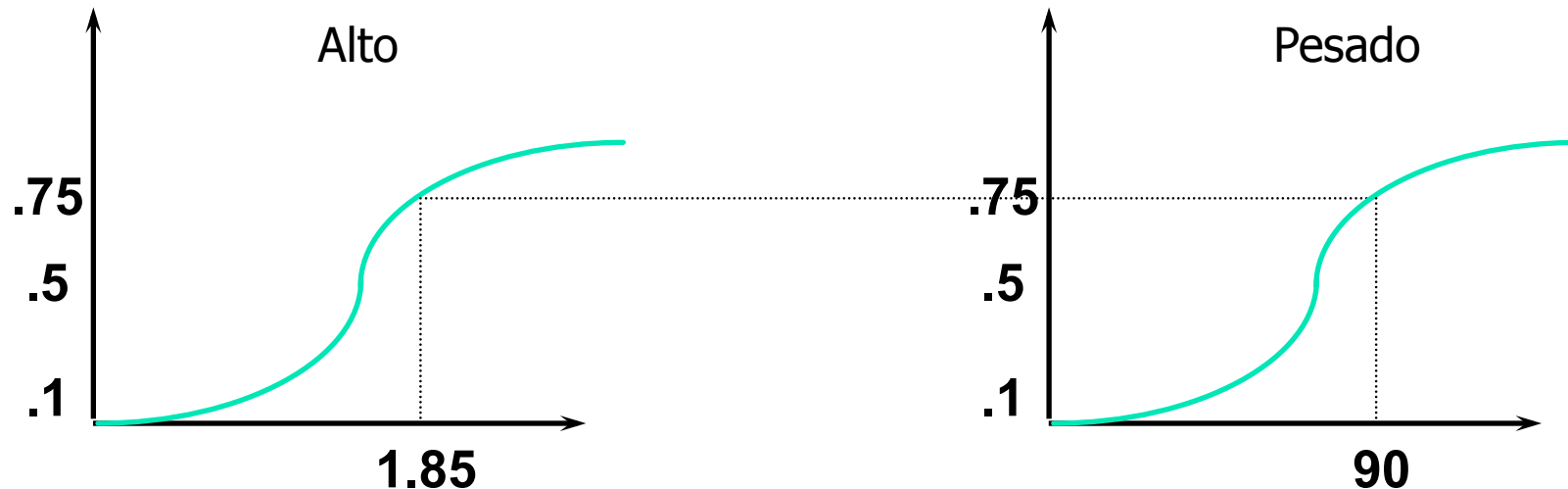
Baixa, Média e alta

1. Se velocidade é alta
Então DPP é longa
2. Se velocidade é baixa
Então DPP é curta

Regras Fuzzy

■ E o raciocínio?

- Avaliar o antecedente
- Aplicar o resultado ao conseqüente
- As regras são ativadas parcialmente, dependendo do antecedente
- Ex: Se a altura é alta, o peso é pesado (altura = 1.85, peso = ?)





Regras Fuzzy

- E no caso de existir vários antecedentes?
- E no caso de existir vários conseqüentes?



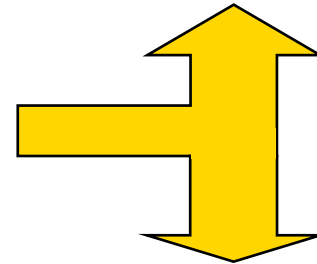
Etapas do raciocínio Fuzzy

1ª FUZZIFICAÇÃO

2ª INFERÊNCIA

3ª DEFUZZIFICAÇÃO

AGREGAÇÃO



COMPOSIÇÃO

Etapas do raciocínio Fuzzy

Variáveis Calculadas
(Valores Linguísticos)

Inferência

Variáveis de Comando
(Valores Linguísticos)

Nível
Linguístico

Fuzzificação

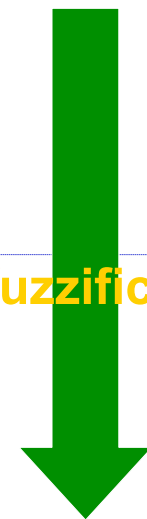
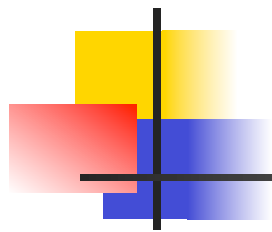
Nível
Numérico

Defuzzificação

Variáveis Calculadas
(Valores Numéricos)

Objecto

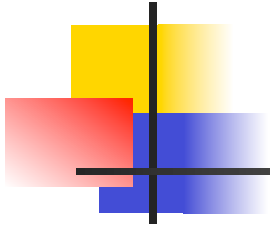
Variáveis de Comando
(Valores Numéricos)





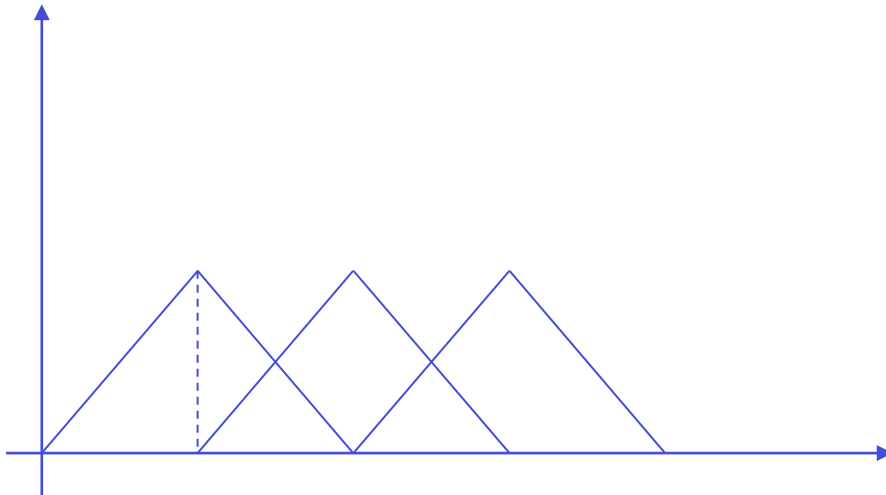
Fuzzificação

- Etapa na qual as variáveis lingüísticas são definidas de forma subjetiva, bem como as funções membro (funções de pertinência)
- Engloba
 - Análise do Problema
 - Definição das Variáveis
 - Definição das Funções de pertinência
 - Criação das Regiões
- Na definição das funções de pertinência para cada variável, diversos tipos de espaço podem ser gerados:
 - Triangular, Trapezoidal, ...



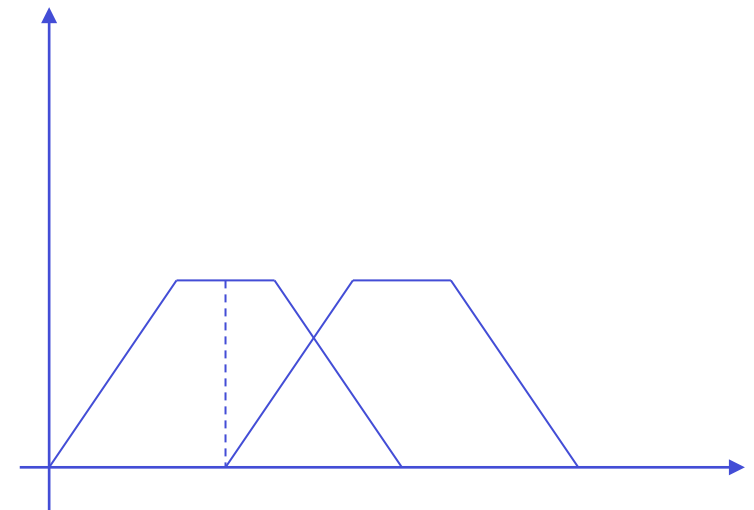
Fuzzificação

TRIANGULAR



Frio Normal Quente

TRAPEZOIDAL



Lento Rápido



Inferência Fuzzy

- Etapa na qual as proposições (regras) são definidas e depois são examinadas paralelamente
- Engloba:
 - Definição das proposições
 - Análise das Regras
 - Criação da região resultante
- O mecanismo chave do modelo *Fuzzy* é a proposição
- A proposição é o relacionamento entre as variáveis do modelo e regiões *Fuzzy*
- Na definição das proposições, deve-se trabalhar com:
 - Proposições Condicionais
if W is Z then X is Y
 - Proposições Não-Condicionais
X is Y



Inferência Fuzzy

■ **AGREGAÇÃO**

- Calcula a importância de uma determinada regra para a situação corrente

■ **COMPOSIÇÃO**

- Calcula a influência de cada regra nas variáveis de saída.

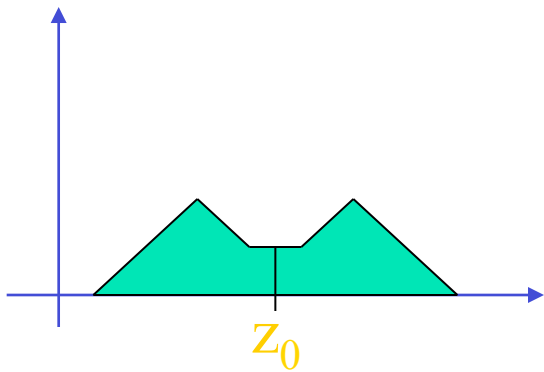


Defuzzificação

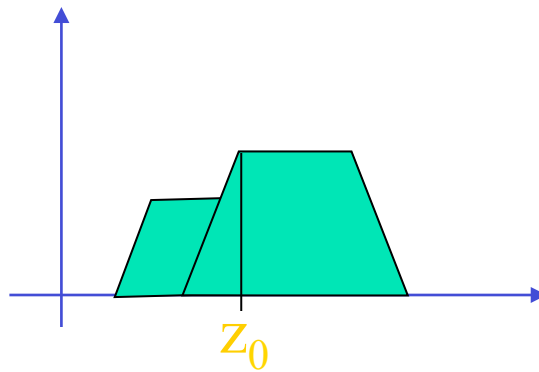
- Etapa no qual as regiões resultantes são convertidas em valores para a variável de saída do sistema
- Esta etapa corresponde a ligação funcional entre as regiões *Fuzzy* e o valor esperado
- Dentre os diversos tipos de técnicas de defuzzificação destaca-se:
 - Centróide
 - *First-of-Maxima*
 - Middle-of-Maxima
 - Critério Máximo

Defuzzificação

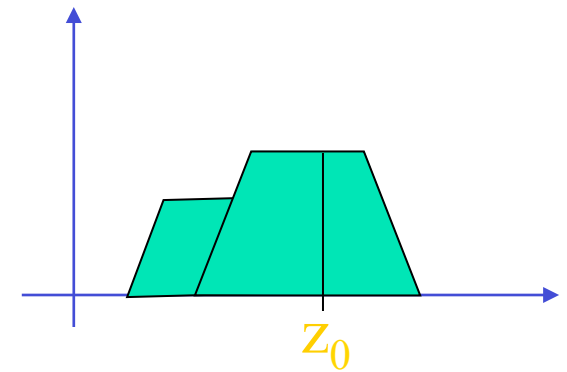
Exemplos:



Centróide



First-of-Maxima



Crítério Máximo



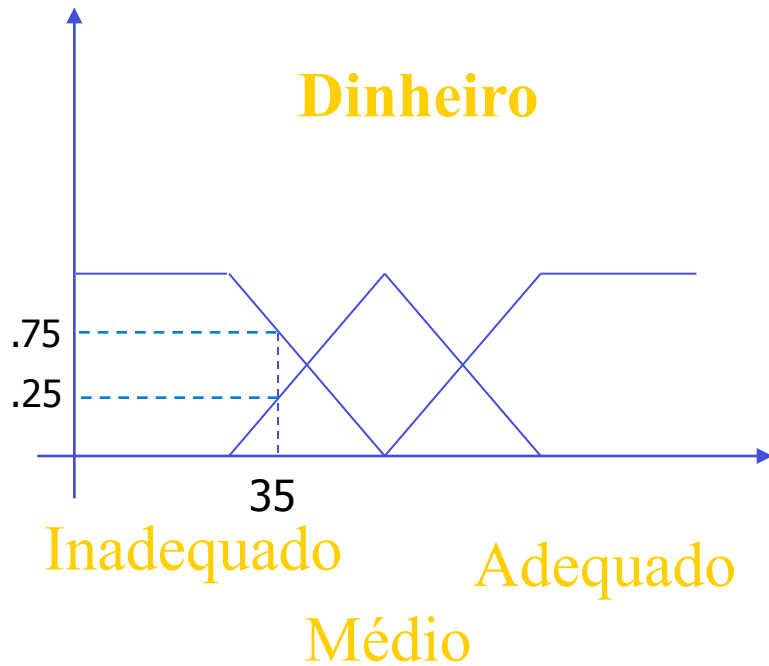
Inferência Fuzzy: Um exemplo

- Objetivo do sistema:
 - um analista de projetos de uma empresa que determina o risco de um determinado projeto
 - Quantidade de dinheiro e de pessoas envolvidas no projeto
- Representação das variáveis de entrada
- Base de conhecimento
 1. Se dinheiro é adequado ou pessoal é pequeno então risco é pequeno
 2. Se dinheiro é médio e pessoal é alto, então risco é normal
 3. Se dinheiro é inadequado, então risco é alto

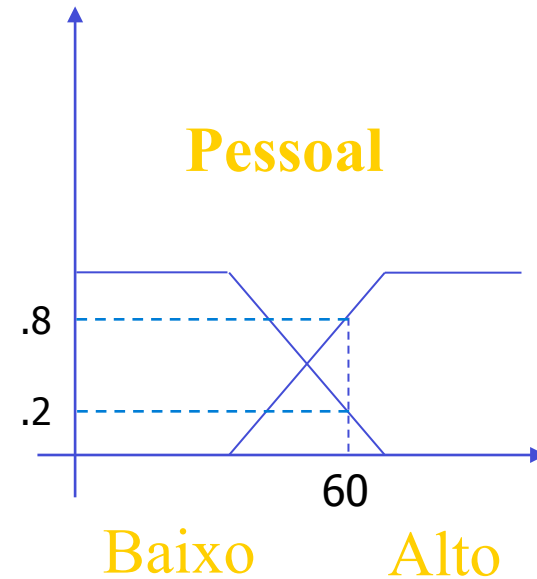
Problema: dinheiro = 35% e pessoal = 60%

Inferência Fuzzy: Um exemplo

■ Passo 1: Fuzzificar



$$\mu_i(d) = 0,25 \text{ \& } \mu_m(d) = 0,75$$



$$\mu_b(p) = 0,2 \text{ \& } \mu_a(p) = 0,8$$

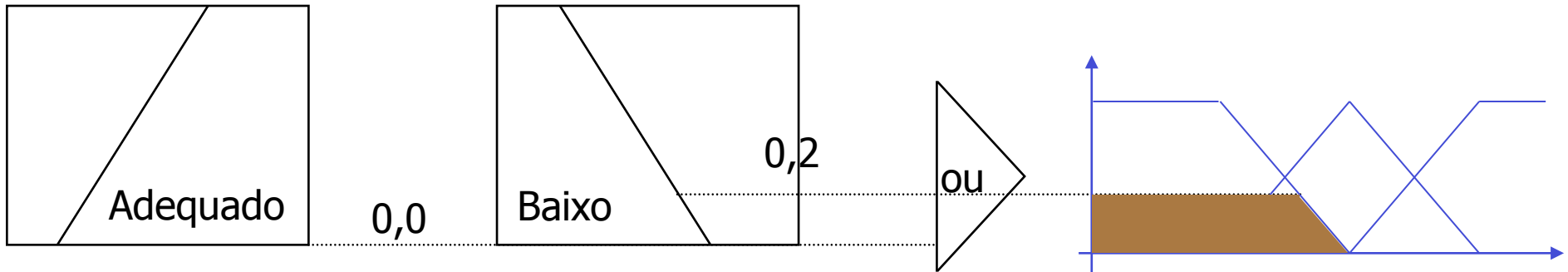
Inferência Fuzzy: Um exemplo

■ Passo 2: Avaliação das regras

Regra 1:

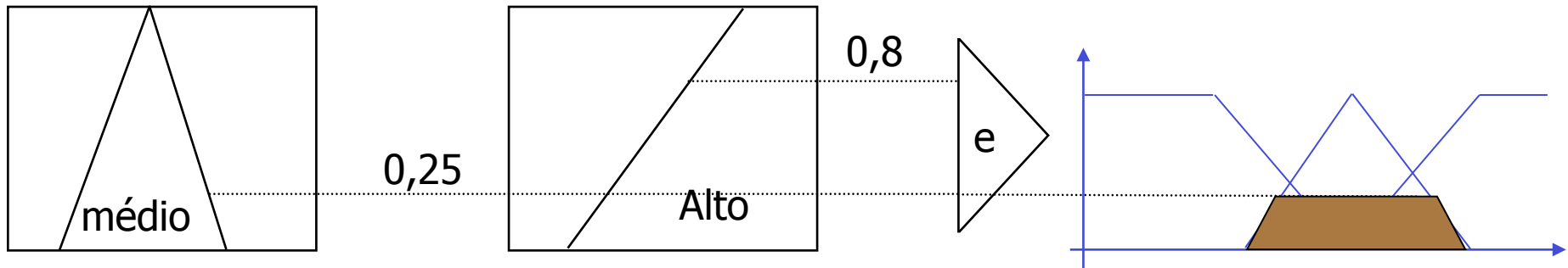
■ Ou \rightarrow máximo e \rightarrow mínimo

Risco



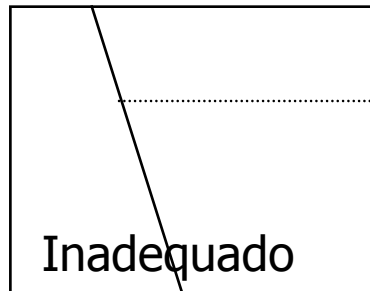
Regra 2:

Risco

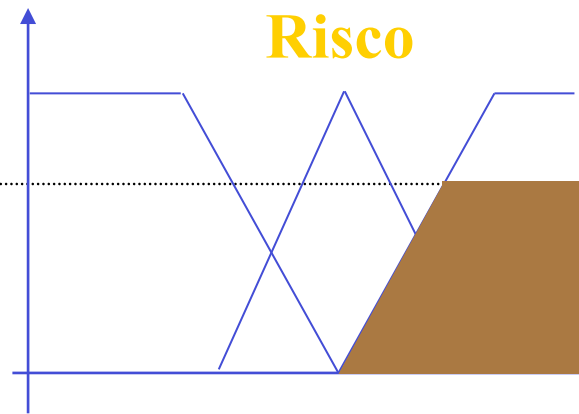


Inferência Fuzzy

Regra 3:

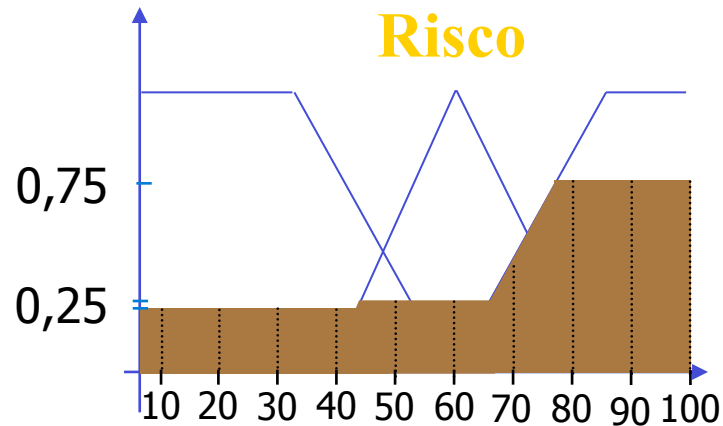


0,75



Inferência Fuzzy

Passo 3: Defuzzificação



$$C = \frac{(10 + 20 + 30 + 40) * 0,2 + (50 + 60 + 70) * 0,25 + (80 + 90 + 100) * 0,75}{0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,75 + 0,75 + 0,75} = \frac{267,5}{3,8} = 70,4$$



Inferência Fuzzy

- O método de Sugeno
 - Igual ao Mandani
 - Conseqüente Singleton
- Computacionalmente eficaz
- Mais utilizado em otimização e adaptação (controle de sistemas)